

Kaksiosaisen kuolevuusperusteen parametriestimointi ja pääoma-arvokertoimet

Samu Salminen ja Tuomas Hakkarainen

3.6.2015

Sisältö

1	Nykyinen yksiosainen Gompertz-kuolevuusmalli	2
1.1	Nykyperusteen määritelmä ja parametrit	2
1.2	Nykyperusteen vahinkosuhteet	3
2	Kaksiosainen kuolevuusperuste	5
2.1	Kaksiosaisen kuolevuusperusteen määritelmä	5
3	Parametrien estimointi aineistosta	6
3.1	Vuoden 2016 toteumakuolevuuden estimointi	6
3.2	Suorasovitteet toteumakuolevuuteen	8
3.3	Ikätriggerin valinta	8
3.4	Suorasovitteiden parametrit	9
3.5	Ikäsiirtoparametrin b_2 valinta	9
3.6	Suorasovitteiden $\ln(\hat{\mu}_x)$ kääntäminen ikäsiirtomalliksi	11
4	N- ja D-luvut kaksiosaisessa kuolevuusperusteessa	12
4.1	D-luvut kaksiosaisessa kuolevuusperusteessa	12
4.2	N-luvut kaksiosaisessa kuolevuusperusteessa	17
4.3	Ikäsiirrot diskonttaus- ja kommutaatiofunktioissa	22
5	Yhteenveto	25

Luku 1

Nykyinen yksiosainen Gompertz-kuolevuusmalli

Nykyinen yksiosainen Gompertz-kuolevuusmalli on ollut käytössä työeläkejärjestelmässä sen alusta asti. Sen etuina on katsottu olevan mm. mallin yksinkertaisuus. Aluksi parametrin b_2 avulla huomioitiin ainoastaan sukupuolten välinen ero kuolevuudessa. Vuodesta 1987 alkaen parametrissa b_2 tehtiin kymmenvuotiskohorttikohtainen. Tämän muutoksen avulla malli huomioi myös kuolevuuden alenemisen. Mallin valinnalla ja osuvuudella on merkitystä vanhuuseläkelikkeessä, sillä se määrää pääoma-arvokertoimet, joilla varaudutaan vastaisten ja alkaneiden vanhuuseläkkeiden suorituksiin tulevaisuudessa.

1.1 Nykyperusteen määritelmä ja parametrit

Määritelmä 1.1. Nykyisen yksiosaisen kuolevuusperusteen (Gompertz) kuolevuusintensiteetti μ iässä x saadaan kaavalla

$$\mu_x = a_1 e^{a_2(x+b_2)} = e^{a_2(x+b_2)+\ln(a_1)}, \text{ missä } x > 0, a_1 > 0, a_2 > 0.$$

Kuolevuusmallin parametreihin on vuosien saatossa tehty useita muutoksia TEL:n/TyEL:n kuolevuuksien muutosten vuoksi. Viimeisin parametrimuutos kuolevuusperusteeseen tehtiin vuoden 2001 lopussa, jota edelsi muutos vuoden 1996 lopussa. Lisäksi vuonna 2008 tehtiin tekninen muutos 90-luvun kohortin huomioimiseksi. Tällä hetkellä naisten kuolevuus vastaa 7 vuotta nuoremman miehen kuolevuutta (ikäsiirtoparametrien sukupuolten välinen ero on 7) ja ikäsiirtoparametri olettaa kuolevuuden alentuvan yhdellä vuodella kymmenessä vuodessa.

Määritelmä 1.2. TyEL:n Gompertz-kuolevuusmallin laskuperusteiden 2014 mukaiset parametrit.

$$a_1 = 5 \cdot 10^{-5} e^{-0,57}$$

$$a_2 = 0,095$$

$$b_{2,mies} = \begin{cases} 0, & v - x < 1930 \\ 0, & 1930 \leq v - x < 1940 \\ -1, & 1940 \leq v - x < 1950 \\ -2, & 1950 \leq v - x < 1960 \\ -3, & 1960 \leq v - x < 1970 \\ -4, & 1970 \leq v - x < 1980 \\ -5, & 1980 \leq v - x < 1990 \\ -6, & 1990 \leq v - x < 2000 \\ -7, & 2000 \leq v - x < 2010 \\ -8, & 2010 \leq v - x < 2014 \end{cases} \quad b_{2,nainen} = \begin{cases} -7, & v - x < 1930 \\ -7, & 1930 \leq v - x < 1940 \\ -8, & 1940 \leq v - x < 1950 \\ -9, & 1950 \leq v - x < 1960 \\ -10, & 1960 \leq v - x < 1970 \\ -11, & 1970 \leq v - x < 1980 \\ -12, & 1980 \leq v - x < 1990 \\ -13, & 1990 \leq v - x < 2000 \\ -14, & 2000 \leq v - x < 2010 \\ -15, & 2010 \leq v - x < 2014 \end{cases}$$

1.2 Nykyperusteen vahinkosuhteet

Kuolevuusperusteen osuvuutta mitataan vastuiden kautta lasketun vahinkosuhteen mukaan. Vahinkosuhteella tarkoitetaan kuolevuusperusteen mukaan teoreettisesti vapautuvan vastuun ja toteutuneen kuolleilta vapautuneen vastuun suhdetta. Vuonna v x -ikäisiä henkiinjääviä on teoreettisen kuolevuuden mukaan lukumääräsuhteena

$$(1.3) \quad \exp \left\{ - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mu_{x+t} dt \right\} \approx e^{-\mu_x},$$

jolloin kuolleiden ja henkiinjäävien suhde on $\frac{1-e^{-\mu_x}}{e^{-\mu_x}}$. Vuoden v ikäkohtainen vanhuuseläkeliikkeen vahinkosuhde lasketaan kaavalla

$$rs_{v,x} = \frac{\frac{1-e^{-\mu_x}}{e^{-\mu_x}}(\bar{V}_{v,x}^{VA} + \bar{V}_{v,x}^V)}{E_{v,x}^V} \approx \frac{(\mu_x + \frac{1}{2}\mu_x^2)(\bar{V}_{v,x}^{VA} + \bar{V}_{v,x}^V)}{E_{v,x}^V} := \frac{V_{v,x}(Q)}{E_{v,x}^V},$$

missä $\bar{V}_{v,x}^{VA}$ on vuoden v lopussa elossaolevien x ikäisten alkanut vanhuuseläkevastuu ja $\bar{V}_{v,x}^V$ vastaava vastainen vanhuuseläkevastuu. $E_{v,x}^V$ on toteutunut kuolleilta x -ikäisiltä vapautunut vanhuuseläkevastuu. Kokonaisvahinkosuhde vuonna v saadaan summaamalla

osoittajan ja nimittäjän termit yli ikien. Kokonaisvahinkosuhte on ollut tappiollinen vuosina 2008-2013. Vaikka kokonaisvahinkosuhte on saatu säännöllisten täydennysten (parametrimuutosten) avulla pidettyä hallinnassa, ovat sukupuolikohtaiset vahinkosuhteet poikenneet toisistaan merkittävästi.

Vuosi v	rs_v (yhteensä)	rs_v (miehet)	rs_v (naiset)
2008	102,7 %	103,8 %	100,0 %
2009	101,9 %	104,4 %	95,5 %
2010	102,0 %	102,1 %	96,5 %
2011	105,8 %	105,2 %	99,5 %
2012	104,7 %	109,5 %	94,5 %
2013	106,2 %	107,9 %	97,8 %

Taulukko 1.1: TyEL:n vanhuuseläkeliikkeen vahinkosuhteet vuosina 2008-2013

Sukupuolikohtaisten vahinkosuhteiden lisäksi kymmenvuotiskohorttikohtaiset vahinkosuhteet ovat poikenneet toisistaan merkittävästi vuosittain. Alla on taulukoitu vuoden 2013 vahinkosuhteet kohorteittain ja sukupuolittain.

Syntymävuosikymmen	rs_v (yhteensä)	rs_v (miehet)	rs_v (naiset)
>80-luku	43,9 %	34,7 %	70,0 %
80-luku	66,8 %	60,1 %	94,7 %
70-luku	106,9 %	104,6 %	115,5 %
60-luku	114,1 %	122,0 %	95,0 %
50-luku	105,7 %	105,7 %	105,7 %
40-luku	106,7 %	107,9 %	103,7 %
30-luku	110,7 %	116,2 %	101,3 %
<30-luku	79,3 %	93,4 %	65,8 %

Taulukko 1.2: TyEL:n vanhuuseläkeliikkeen vahinkosuhteet vuonna 2013 sukupuolittain ja kymmenivuotiskohorteittain

Huomionarvoista on se, että vahinkosuhteet ovat tappiollisia kohorteissa, joissa vastuu-paino on tällä hetkellä suuri (1940- ja 1950-syntyneet sekä miehillä 1960-syntyneet). Kokonaisvahinkosuhte painuu tappiolliseksi pääosin näiden tappiollisten kohorttien vuoksi. Vanhoissa i'issä kuolevuusperuste tuottaa merkittävää ylijäämää, eli todellinen kuolevuus on korkeampaa kuin nykyperuste ennustaa (1920-luvulla ja sitä ennen syntyneillä). Tämä ylijäämä ei kuitenkaan riitä nostamaan kokonaisvahinkosuhdetta positiiviseksi.

Luku 2

Kaksiosainen kuolevuusperuste

Määritellään kohortti- ja sukupuolikohtaisten vahinkosuhde-ennusteiden tasaamiseksi kaksiosainen Gompertz-kuolevuusmalli, jossa tietyssä ikäsiirretyssä iässä k muutetaan jäljellä olevan elinajan jakauman parametreja vastaamaan aineistosta havaittua kuolevuuden käyttäytymistä.

2.1 Kaksiosaisen kuolevuusperusteen määritelmä

Määritelmä 2.1. Kaksiosaisen kuolevuusperusteen kuolevuusintensiteetti μ_x on

$$\mu_x = \begin{cases} a_{11}e^{a_{12}(x+b_2)} & , \text{ kun } x + b_2 \leq k \\ a_{21}e^{a_{22}(x+b_2)} & , \text{ kun } x + b_2 > k \end{cases} .$$

Parametrit riippuvat kaksiosaisessa mallissa siis ikäsiirretystä iästä $x + b_2$. Kun ikäsiirto-parametri b_2 valitaan vakioksi rajajän k molemmin puolin, on μ_x :n määritelmä yksikäsitteinen.

Parametrin k kiinnittämisen jälkeen parametrit a_{i1} ja a_{i2} , $i \in \{1, 2\}$ voidaan estimoida sovittamalla logaritmiseen toteumakuolevuuteen suorat pienimmän neliösumman menetelmällä parametrin k molemmille puolille. Koska ikäsiirto b_2 ei riipu rajasta k , voidaan myös kaksiosaisen mallin pohjalta \bar{N}_x ja D_x taulukoida vastaamaan ikäsiirtämättömiä iäkiä, jolloin x -ikäiselle tiettyyn kohorttiin kuuluvalla henkilölle voidaan N- ja D-luvut hakea ikäsiirtämättömästä taulukosta ikäsiirron b_2 mukaisesti.

Seuraavissa osioissa esitellään parametrien johtaminen havaintoaineistosta sekä N- ja D-lukujen laskeminen uudella kaksiosaisella soviteella.

Luku 3

Parametrien estimointi aineistosta

3.1 Vuoden 2016 toteumakuolevuuden estimointi

Kaksiosaisen kuolevuusperusteen parametrit on laskettu sovittamalla ensin kaksiosainen log-lineaarinen suora vuoden 2016 estimoituun riskiperusteanalyysin mukaiseen kuolevuuteen valitun rajajän k mukaisesti.

Vuoden 2016 TyEL-kuolevuus on ennustettu alentamalla vuosien 2009-2013 riskiperusteanalyysien ikäkohtaista liukuvaa keskiarvokuolevuutta Lee-Miller-mallin antamalla väestökuolevuuteen pohjautuvalla mallilla.

Käytetty Lee-Miller-malli pohjautuu vuosien 1955-2013 väestökuolevuuksiin ja se antaa ikäkohtaisen kuolevuuden vakio muutoksen, jolla kuolevuus alenee vuodessa keskimäärin noin 1,61 % miehillä ja naisilla noin 1,83 %.

Vuoden 2016 ikäkohtainen kuolevuusintensiiteetti lasketaan kaavalla

$$(3.1) \quad \mu_{tot,x}^{2016} = \frac{(1 - \Delta_x)^{(2016-2013)}}{5} \sum_{v=2009}^{2013} (\mu_{tot,x}^v),$$

missä Δ_x on ikäkohtainen Lee-Miller mallin antama kuolevuuden muutos vuodessa. Malli olettaa muutoksen vuodessa vakioksi tietyssä iässä. Tällä tekniikalla saadaan vuodelle 2016 seuraavat kuolevuusintensiiteetit

Ikä	μ_x (miehet)	μ_x (naiset)	Ikä	μ_x (miehet)	μ_x (naiset)	Ikä	μ_x (miehet)	μ_x (naiset)
18	0,00021	0,00004	46	0,00167	0,00071	74	0,02576	0,01338
19	0,00034	0,00008	47	0,00165	0,00094	75	0,02715	0,01568
20	0,00042	0,00012	48	0,00184	0,00086	76	0,03221	0,01812
21	0,00040	0,00008	49	0,00222	0,00110	77	0,03485	0,01962
22	0,00047	0,00012	50	0,00225	0,00123	78	0,04117	0,02295
23	0,00055	0,00016	51	0,00247	0,00142	79	0,04510	0,02656
24	0,00055	0,00010	52	0,00268	0,00168	80	0,05194	0,03095
25	0,00061	0,00015	53	0,00307	0,00200	81	0,05719	0,03514
26	0,00053	0,00016	54	0,00355	0,00208	82	0,06881	0,04185
27	0,00045	0,00018	55	0,00429	0,00230	83	0,07698	0,04886
28	0,00045	0,00013	56	0,00458	0,00205	84	0,08260	0,05360
29	0,00053	0,00020	57	0,00516	0,00284	85	0,09469	0,06964
30	0,00053	0,00017	58	0,00537	0,00288	86	0,11041	0,07543
31	0,00063	0,00020	59	0,00641	0,00357	87	0,13207	0,08767
32	0,00055	0,00019	60	0,00687	0,00361	88	0,13958	0,10373
33	0,00039	0,00018	61	0,00729	0,00413	89	0,15651	0,12116
34	0,00046	0,00030	62	0,00825	0,00454	90	0,17693	0,13584
35	0,00056	0,00020	63	0,00846	0,00470	91	0,18977	0,15949
36	0,00055	0,00030	64	0,01019	0,00521	92	0,23055	0,17352
37	0,00064	0,00025	65	0,01138	0,00603	93	0,24262	0,19330
38	0,00067	0,00033	66	0,01272	0,00643	94	0,28360	0,22478
39	0,00061	0,00040	67	0,01297	0,00716	95	0,29616	0,23676
40	0,00081	0,00054	68	0,01467	0,00707	96	0,18063	0,29784
41	0,00116	0,00041	69	0,01583	0,00820	97	0,35188	0,29159
42	0,00107	0,00047	70	0,01817	0,00918	98	0,45416	0,27426
43	0,00108	0,00072	71	0,01842	0,01010	99	0,50870	0,32981
44	0,00117	0,00065	72	0,01973	0,01117	100	0,60598	0,33829
45	0,00132	0,00071	73	0,02349	0,01203			

Taulukko 3.1: Estimoidut TyEL-kuolevuudet i'ittäin vuonna 2016

3.2 Suorasovitteet toteumakuolevuuteen

Vuoden 2016 ennustettuun toteumakuolevuuteen tehdään pienimmän neliösumman menetelmällä suorasovitteet molemmille sukupuolille

$$(3.2) \quad \ln(\hat{\mu}_x^{2016}) = \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 & , \text{ kun } 40 \leq x \leq k \leq 90 \\ \alpha_2 x + \beta_2 & , \text{ kun } 40 < k < x \leq 90 \end{cases}, \text{ missä}$$

$$\alpha_1 = \frac{(k - 40 + 1) \left(\sum_{x=40}^k x \ln(\mu_{tot,x}^{2016}) \right) - \left(\sum_{x=40}^k x \right) \left(\sum_{x=40}^k \ln(\mu_{tot,x}^{2016}) \right)}{(k - 40 + 1) \left(\sum_{x=40}^k x^2 \right) - \left(\sum_{x=40}^k x \right)^2}$$

$$\alpha_2 = \frac{(90 - k) \left(\sum_{x=k+1}^{90} x \ln(\mu_{tot,x}^{2016}) \right) - \left(\sum_{x=k+1}^{90} x \right) \left(\sum_{x=k+1}^{90} \ln(\mu_{tot,x}^{2016}) \right)}{(90 - k) \left(\sum_{x=k+1}^{90} x^2 \right) - \left(\sum_{x=k+1}^{90} x \right)^2}$$

$$\beta_1 = \frac{\left(\sum_{x=40}^k \ln(\mu_{tot,x}^{2016}) \right) \left(\sum_{x=40}^k x^2 \right) - \left(\sum_{x=40}^k x \right) \left(\sum_{x=40}^k x \ln(\mu_{tot,x}^{2016}) \right)}{(k - 40 + 1) \left(\sum_{x=40}^k x^2 \right) - \left(\sum_{x=40}^k x \right)^2}$$

$$\beta_2 = \frac{\left(\sum_{x=k+1}^{90} \ln(\mu_{tot,x}^{2016}) \right) \left(\sum_{x=k+1}^{90} x^2 \right) - \left(\sum_{x=k+1}^{90} x \right) \left(\sum_{x=k+1}^{90} x \ln(\mu_{tot,x}^{2016}) \right)}{(90 - k) \left(\sum_{x=k+1}^{90} x^2 \right) - \left(\sum_{x=k+1}^{90} x \right)^2}.$$

3.3 Ikätriggerin valinta

Parametri k on mallissa suhteellisen vapaasti valittavissa. Optimaalisen rajaiän k selvittämiseksi on tarkasteltu miesten ja naisten logaritmissiin toteumakuolevuuksiin sovitettujen kaksiosaisten suorien selitysasteita. Sovitteita on tehty sekä TyEL:n riskiperusteanalyysien mukaisesti että Tilastokeskuksen julkaisemiin väestökuolevuuksiin.

Kuolevuuden satunnaisuuden vuoksi sovitteet on tehty viiden vuoden liukuviin keskiarvo-kuolevuuksiin. Lisäksi sovitteet on laskettu ainoastaan ikävälillä 40-90 toteumakuolevuuk-sien pohjalta, koska nuorilla ja vanhoilla pieni havaintomäärä ja tätä kautta kuolevuuden satunnaisuus aiheuttavat sovitteisiin epätarkkuutta. Vastuupaino on myös näissä i'issä

pienehkö, joten näille havainnoille ei ole perusteltua antaa painoarvoa sovitteissa. Kaksiosaisen suorasovitteiden selitysaste on laskettu kaavalla

$$(3.3) \quad R_v^2 = \frac{\sum_{x=40}^{90} \left(\ln(\hat{\mu}_x^v) - \frac{1}{(90-40+1)} \sum_{x=40}^{90} \ln(\mu_{tot,x}^v) \right)^2}{\sum_{x=40}^{90} \left(\ln(\mu_{tot,x}^v) - \frac{1}{(90-40+1)} \sum_{x=40}^{90} \ln(\mu_{tot,x}^v) \right)^2}.$$

Selitysasteiden valossa tasaisimman parannuksen sekä TyEL- että väestökuolevuuden selitysasteisiin tuottaa valinta $k = 70$, joka parantaa esimerkiksi TyEL:n vuosien 2009-2013 keskiarvokuolevuuteen sovitettuna selitysastetta noin 0,15 %-yksikköä miehillä ja 0,49 %-yksikköä naisilla verrattuna koko ikäväliin sovitettuun yksittäiseen suoraan. Vuosien 2001-2010 väestön keskiarvokuolevuuksissa vastaavat parannukset ovat 0,36 %-yksikköä ja 1,62 %-yksikköä. 10 vuoden liukuvaan väestökuolevuuteen sovitettuna optimiraja k näyttää olevan matalampi kuin TyEL:n kuolevuuteen sovitettuna. Valinta $k = 70$ tuottaa molemmissa kuolevuuksissa merkittävät selitysasteiden parannukset etenkin naisilla.

3.4 Suorasovitteiden parametrit

Valitsemalla $k = 70$ ja sovittamalla suorat pienimmän neliösumman menetelmällä vuoden 2016 ennustettuun toteumakuolevuuteen ikävälille 40-90 saadaan

$$\ln(\hat{\mu}_{x,mies}^{2016}) \approx \begin{cases} 0,1027x - 11,18 & , \text{ kun } 40 \leq x \leq 70 \\ 0,1217x - 12,68 & , \text{ kun } 70 < x \leq 90 \end{cases}$$

$$\ln(\hat{\mu}_{x,nainen}^{2016}) \approx \begin{cases} 0,1031x - 11,84 & , \text{ kun } 40 \leq x \leq 70 \\ 0,1416x - 14,77 & , \text{ kun } 70 < x \leq 90 \end{cases}.$$

Huomionarvoista näissä sovitteissa on se, että ikäsiirtoparametria b_2 ei ole otettu huomioon, vaan suorasovitteissa $b_2 = 0$ ja sovitteet mallintavat ainoastaan vuoden 2016 kuolevuutta. Ikäsiirto on kuitenkin edelleen mallin toiminnan kannalta relevantti, jotta kuolevuuden aleneminen saadaan huomioitua. Yllä olevat suorasovitteet käännetään myöhemmin ikäsiirtomalliksi.

3.5 Ikäsiirtoparametrin b_2 valinta

Nykyperusteen ikäsiirto b_2 olettaa kuolevuuden alenevan vastaamaan yhtä ikävuotta alemmaa kuolevuutta jokaisessa kymmenessä vuodessa (-1 ikäsiirto per kymmenvuotiskohortti). Tämä oletus on nykyperustetta tarkasteltaessa havaittu riittämättömäksi.

Käytännössä ikäsiirtovalintaa rajoittaa järjestelmäteknisellä tasolla se, että ikäsiirron on oltava jokaisella kohortilla kokonaisluku (pääoma-arvot haetaan taulukoista ikäsiirron avulla). Näin ollen ikäsiirtoa ei ole mahdollista valita täysin optimaalisesti estimoimalla havaintoaineistosta. Kaksi vuotta kymmenessä vuodessa alentaa kuolevuutta liikaa, jolloin sovitteista tulee yliturvaavia lyhyellä aikavälillä riippumatta optimaalisesta lähtötason sovitukselta. Olettamalla kuolevuuden alentuva $\frac{5}{3}$ vuotta kymmenessä vuodessa, saadaan ikäkohtaiset vahinkosuhteet tasattua. Tällainen kuolevuuden aleneminen voidaan rakentaa malliin valitsemalla b_2 parametrin muutos kymmenvuotiskohorteille sykleissä $\{\dots - 2, -2, -1, -2, -2, -1, -2 \dots\}$.

Koska kaksiosaisessa kuolevuusperusteessa parametrit a_1 ja a_2 ovat jo sukupuolikohtaiset, voidaan ikäsiirtoihin tehdä oletus $b_{2,mies} = b_{2,nainen} = b_2$ kaikille kohorteille. Oletus ei ole välttämätön mallin järjestelmätekniseen toimivuuteen, mutta sen hylkääminen ei myöskään tuo lisäarvoa mallin sopivuuteen.

Ylempänä sovitetut suorat eivät ota kantaa ikäsiirtoon, vaan sovitteesta laskettu kuolevuus olettaa $b_2 = 0$. Käytännössä ikäsiirron nollakohdasta täytyy mallissa tehdä oma oletuksensa. Lisäksi koska kahden kohortin välinen ikäsiirto ei ole vakio (kuolevuus alenee $\frac{5}{3}$ vuotta kymmenessä vuodessa), täytyy myös ikäsiirtojen jaksottamiseksi tehdä päätös.

Ikärajan k efektiivisyyden riippuessa parametrissa b_2 , ei ikäsiirron nollatasoa voida valita suoraan vastasyntyneelle kuten sovitteet olettavat (tarkasteluhetkellä 2010-luvulla syntyneet). Esimerkiksi 1960-luvulla syntyneillä ikäsiirretty ikä ylittäisi tällöin parametrin k jo iässä 61 (jos valitaan kohortille ikäsiirto $b_2 = +9$). Perusteltu valinta ikäsiirron nollakohdalle on kohortti, jossa tällä hetkellä on suuri vastuupaino. Mallin valitut ikäsiirrot ovat

$$b_2 = \begin{cases} 5, & v - x < 1930 \\ 3, & 1930 \leq v - x < 1940 \\ 2, & 1940 \leq v - x < 1950 \\ 0, & 1950 \leq v - x < 1960 \\ -2, & 1960 \leq v - x < 1970 \\ -3, & 1970 \leq v - x < 1980 \\ -5, & 1980 \leq v - x < 1990 \\ -7, & 1990 \leq v - x < 2000 \\ -8, & 2000 \leq v - x < 2010 \\ -10, & 2010 \leq v - x < 2020 \end{cases}.$$

3.6 Suorasovitteiden $\ln(\hat{\mu}_x)$ kääntäminen ikäsiirtomalliksi

Aiemmin johdettiin pienimmän neliösumman menetelmällä parametrit α_i ja β_i , $i \in \{1, 2\}$. Koska ikäsiirtomallissa ikäsiirto kasvaa keskimäärin (approksimaatio) $\frac{5}{3 \cdot 10}$ lisää yhdessä ikävuodessa, vastaa sovitteissa ikää x ikäsiirtomallissa ikä $x + \frac{1}{6}x = \frac{7x}{6}$ ja kääntäen ikää x ikäsiirtomallissa vastaa sovitteissa ikä $\frac{6x}{7}$. Tämän havainnon jälkeen sovitettu malli voidaan muuttaa ikäsiirtomalliksi vaatimalla

$$\begin{aligned} \ln(\mu_x) = \ln(a_{i1}e^{a_{i2}(x+b_2)}) &= \ln(a_{i1}) + a_{i2}x + a_{i2}b_2 = \ln(\hat{\mu}_x) = \alpha_i \left(\frac{6x}{7}\right) + \beta_i, \quad i \in \{1, 2\} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i2}x = \alpha_i \left(\frac{6x}{7}\right) \\ \ln(a_{i1}) + a_{i2}b_2 = \beta_i \end{cases} \end{aligned}$$

Koska valituilla ikäsiirroilla sovitushetkellä $b_2 = -10 \Leftrightarrow x = 0$, saadaan

$$a_{i1} = e^{\beta_i + 10a_{i2}},$$

joten ikäsiirretyn mallin parametreiksi saadaan

$$\begin{aligned} a_{i1} &= \exp\left\{\beta_i + \frac{6 \cdot 10\alpha_i}{7}\right\} \\ a_{i2} &= \frac{6\alpha_i}{7}. \end{aligned}$$

Määritelmä 3.4. Suoraan vuoden 2016 ennustettuun toteumakuolevuuteen sovitettuna kaksiosaisen kuolevuusperusteen kuolevuusintensiteetti μ on

$$\begin{aligned} \mu_{x,mies} &= \begin{cases} e^{\frac{6}{7} \cdot 1,027 - 11,18} \cdot e^{\frac{6}{7} \cdot 0,1027 \cdot (x+b_2)}, & \text{kun } x + b_2 \leq 70 \\ e^{\frac{6}{7} \cdot 1,217 - 12,68} \cdot e^{\frac{6}{7} \cdot 0,1217 \cdot (x+b_2)}, & \text{kun } x + b_2 > 70 \end{cases} \\ \mu_{x,nainen} &= \begin{cases} e^{\frac{6}{7} \cdot 1,031 - 11,84 - 0,02} \cdot e^{\frac{6}{7} \cdot 0,1031 \cdot (x+b_2)}, & \text{kun } x + b_2 \leq 70 \\ e^{\frac{6}{7} \cdot 1,416 - 14,77 - 0,02} \cdot e^{\frac{6}{7} \cdot 0,1416 \cdot (x+b_2)}, & \text{kun } x + b_2 > 70 \end{cases} \end{aligned}$$

Naisille on parametrin a_1 eksponenttifunktion potenssiin tehty $-0,02$ tasokorjaus. Korjaustarve syntyy siitä, että valittu ikäsiirto ei naisilla aivan riitä seuraamaan kuolevuuden alenemista.

Luku 4

N- ja D-luvut kaksiosaisessa kuolevuusperusteessa

4.1 D-luvut kaksiosaisessa kuolevuusperusteessa

Funktio $D(x) := D_x$ kuvaa vastasyntyneen elossaolotodennäköisyyttä iässä x korolla syntymähetkelle diskontattuna.

$$(4.1) \quad D_x = e^{-\int_0^x (\mu_t + \delta) dt}, \quad x \geq 0$$

Integraali aukikirjoitettuna (yksiosaisella perusteella) D_x saadaan muotoon

$$D_x = e^{-\frac{\mu_x}{a_2} + \frac{\mu_0}{a_2} - \delta x}, \quad x \geq 0$$

Koska kaksiosaisessa mallissa kuolevuusintensiteetin μ_t kaava riippuu siitä, onko $t + b_2 \leq k$ vai $t + b_2 > k$ ($k = 70$), merkitään

$$\mu_t = \begin{cases} \mu_{1,t}, & \text{kun } t + b_2 \leq k \\ \mu_{2,t}, & \text{kun } t + b_2 > k \end{cases}$$

ja otetaan käyttöön seuraavat merkinnät eri parametrein lasketuille D_x funktioille

$$\begin{aligned} D_{1,x} &:= e^{-\int_0^x (\mu_{1,t} + \delta) dt} = e^{-\frac{\mu_{1,x}}{a_{12}} + \frac{\mu_{1,0}}{a_{12}} - \delta x}, \quad x \geq 0 \\ D_{2,x} &:= e^{-\int_0^x (\mu_{2,t} + \delta) dt} = e^{-\frac{\mu_{2,x}}{a_{22}} + \frac{\mu_{2,0}}{a_{22}} - \delta x}, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Ikäsiirtämättömät $D_{i,x}$, $i \in \{1, 2\}$ on taulukoitu seuraavalla sivulla. Korkokantana on käytetty rahastokorkoa $i_0 = 3,0$ %, jolloin $\delta = \ln(1 + i_0)$.

Ikä	$D_{1,x}$ (miehet)	$D_{1,x}$ (naiset)	Ikä	$D_{1,x}$ (miehet)	$D_{1,x}$ (naiset)	Ikä	$D_{1,x}$ (miehet)	$D_{1,x}$ (naiset)
0	1,000000000	1,000000000	44	0,267512900	0,269862203	88	0,030654917	0,046774102
1	0,970839643	0,970856426	45	0,259282307	0,261773478	89	0,027436481	0,043516330
2	0,942526563	0,942560644	46	0,251265831	0,253906717	90	0,024372789	0,040326293
3	0,915035958	0,915087895	47	0,243455823	0,246254664	91	0,021474911	0,037209644
4	0,888343740	0,888414141	48	0,235844789	0,238810232	92	0,018753406	0,034172853
5	0,862426519	0,862516038	49	0,228425390	0,231566497	93	0,016217905	0,031223159
6	0,837261573	0,837370920	50	0,221190429	0,224516690	94	0,013876679	0,028368494
7	0,812826836	0,812956773	51	0,214132857	0,217654192	95	0,011736188	0,025617366
8	0,789100875	0,789252222	52	0,207245760	0,210972526	96	0,009800645	0,022978705
9	0,766062870	0,766236510	53	0,200522361	0,204465357	97	0,008071625	0,020461660
10	0,743692599	0,743889475	54	0,193956019	0,198126479	98	0,006547747	0,018075364
11	0,721970417	0,722191542	55	0,187540222	0,191949815	99	0,005224472	0,015828638
12	0,700877237	0,701123696	56	0,181268596	0,185929411	100	0,004094036	0,013729674
13	0,680394521	0,680667470	57	0,175134896	0,180059432	101	0,003145562	0,011785678
14	0,660504252	0,660804930	58	0,169133020	0,174334157	102	0,002365343	0,010002506
15	0,641188928	0,641518655	59	0,163257005	0,168747979	103	0,001737317	0,008384293
16	0,622431540	0,622791724	60	0,157501036	0,163295397	104	0,001243693	0,006933122
17	0,604215559	0,604607702	61	0,151859458	0,157971021	105	0,000865706	0,005648738
18	0,586524921	0,586950621	62	0,146326780	0,152769562	106	0,000584427	0,004528340
19	0,569344014	0,569804973	63	0,140897696	0,147685843	107	0,000381566	0,003566497
20	0,552657660	0,553155689	64	0,135567094	0,142714787	108	0,000240188	0,002755179
21	0,536451104	0,536988129	65	0,130330082	0,137851431	109	0,000145284	0,002083949
22	0,520710002	0,521288069	66	0,125182006	0,133090919	110	0,000084134	0,001540305
23	0,505420404	0,506041688	67	0,120118479	0,128428514	111	0,000046460	0,001110153
24	0,490568744	0,491235554	68	0,115135412	0,123859599	112	0,000024358	0,000778403
25	0,476141826	0,476856616	69	0,110229046	0,119379689	113	0,000012066	0,000529623
26	0,462126815	0,462892185	70	0,105395993	0,114984438	114	0,000005618	0,000348709
27	0,448511220	0,449329932	71	0,100633280	0,110669653	115	0,000002445	0,000221502
28	0,435282887	0,436157868	72	0,095938396	0,106431309	116	0,000000988	0,000135290
29	0,422429985	0,423364339	73	0,091309345	0,102265563	117	0,000000369	0,000079170
30	0,409940998	0,410938012	74	0,086744700	0,098168782	118	0,000000126	0,000044212
31	0,397804708	0,398867867	75	0,082243668	0,094137556	119	0,000000039	0,000023460
32	0,386010192	0,387143185	76	0,077806144	0,090168737	120	0,000000011	0,000011773
33	0,374546808	0,375753540	77	0,073432780	0,086259458	121	0,000000003	0,000005558
34	0,363404183	0,364688786	78	0,069125046	0,082407176	122	0,000000001	0,000002455
35	0,352572208	0,353939053	79	0,064885290	0,078609706	123	$1 \cdot 10^{-10}$	0,000001008
36	0,342041024	0,343494733	80	0,060716789	0,074865261	124	$1 \cdot 10^{-11}$	0,000000382
37	0,331801014	0,333346473	81	0,056623801	0,071172502	125	$2 \cdot 10^{-12}$	0,000000133
38	0,321842796	0,323485165	82	0,052611590	0,067530582	126	$3 \cdot 10^{-13}$	0,000000042
39	0,312157213	0,313901940	83	0,048686445	0,063939195	127	$2 \cdot 10^{-14}$	0,000000012
40	0,302735320	0,304588157	84	0,044855674	0,060398632	128	$2 \cdot 10^{-15}$	0,000000003
41	0,293568383	0,295535398	85	0,041127560	0,056909830	129	$1 \cdot 10^{-16}$	0,000000001
42	0,284647867	0,286735454	86	0,037511297	0,053474425			
43	0,275965426	0,278180323	87	0,034016874	0,050094794			

Taulukko 4.1: Ikäsiirtämättömät $D_{1,x}$ -parametrit

Ikä	$D_{2,x}$ (miehet)	$D_{2,x}$ (naiset)	Ikä	$D_{2,x}$ (miehet)	$D_{2,x}$ (naiset)	Ikä	$D_{2,x}$ (miehet)	$D_{2,x}$ (naiset)
0	1,000000000	1,000000000	44	0,270132501	0,271780681	88	0,032633979	0,047051667
1	0,970864746	0,970872475	45	0,262024181	0,263790416	89	0,028947756	0,043074358
2	0,942577390	0,942593199	46	0,254133618	0,256025756	90	0,025424229	0,039135379
3	0,915113182	0,915137452	47	0,246453089	0,248479449	91	0,022084858	0,035253500
4	0,888448087	0,888481236	48	0,238974999	0,241144394	92	0,018950869	0,031451193
5	0,862558767	0,862601249	49	0,231691870	0,234013623	93	0,016042323	0,027754440
6	0,837422560	0,837474866	50	0,224596333	0,227080299	94	0,013377061	0,024192275
7	0,813017455	0,813080119	51	0,217681120	0,220337698	95	0,010969576	0,020795974
8	0,789322080	0,789395681	52	0,210939052	0,213779205	96	0,008829905	0,017597888
9	0,766315678	0,766400840	53	0,204363031	0,207398295	97	0,006962621	0,014629863
10	0,743978090	0,744075490	54	0,197946038	0,201188532	98	0,005366065	0,011921326
11	0,722289737	0,722400104	55	0,191681116	0,195143546	99	0,004031935	0,009497109
12	0,701231602	0,701355725	56	0,185561371	0,189257030	100	0,002945324	0,007375201
13	0,680785215	0,680923942	57	0,179579965	0,183522726	101	0,002085304	0,005564698
14	0,660932634	0,661086881	58	0,173730108	0,177934410	102	0,001426029	0,004064242
15	0,641656430	0,641827182	59	0,168005061	0,172485881	103	0,000938324	0,002861308
16	0,622939673	0,623127989	60	0,162398129	0,167170948	104	0,000591566	0,001932581
17	0,604765913	0,604972933	61	0,156902666	0,161983420	105	0,000355661	0,001245590
18	0,587119167	0,587346118	62	0,151512076	0,156917091	106	0,000202855	0,000761469
19	0,569983907	0,570232105	63	0,146219822	0,151965726	107	0,000109128	0,000438537
20	0,553345040	0,553615900	64	0,141019435	0,147123055	108	0,000055016	0,000236097
21	0,537187901	0,537482940	65	0,135904528	0,142382754	109	0,000025808	0,000117796
22	0,521498235	0,521819082	66	0,130868821	0,137738445	110	0,000011176	0,000053934
23	0,506262182	0,506610586	67	0,125906159	0,133183679	111	0,000004429	0,000022411
24	0,491466272	0,491844106	68	0,121010552	0,128711937	112	0,000001590	0,000008347
25	0,477097404	0,477506677	69	0,116176214	0,124316624	113	0,000000512	0,000002747
26	0,463142838	0,463585701	70	0,111397610	0,119991071	114	0,000000146	0,000000786
27	0,449590180	0,450068939	71	0,106669521	0,115728543	115	0,000000036	0,000000192
28	0,436427376	0,436944499	72	0,101987116	0,111522252	116	0,000000008	0,000000039
29	0,423642693	0,424200820	73	0,097346033	0,107365375	117	0,000000001	0,000000007
30	0,411224710	0,411826669	74	0,092742478	0,103251091	118	$2 \cdot 10^{-10}$	0,000000001
31	0,399162312	0,399811125	75	0,088173341	0,099172623	119	$2 \cdot 10^{-11}$	$9 \cdot 10^{-11}$
32	0,387444670	0,388143570	76	0,083636316	0,095123293	120	$2 \cdot 10^{-12}$	$7 \cdot 10^{-12}$
33	0,376061237	0,376813677	77	0,079130050	0,091096604	121	$1 \cdot 10^{-13}$	$3 \cdot 10^{-13}$
34	0,365001733	0,365811403	78	0,074654290	0,087086334	122	$1 \cdot 10^{-14}$	$1 \cdot 10^{-14}$
35	0,354256137	0,355126980	79	0,070210051	0,083086661	123	$4 \cdot 10^{-16}$	$3 \cdot 10^{-16}$
36	0,343814676	0,344750897	80	0,065799790	0,079092310	124	$1 \cdot 10^{-17}$	$6 \cdot 10^{-18}$
37	0,333667813	0,334673902	81	0,061427574	0,075098735	125	$2 \cdot 10^{-19}$	$5 \cdot 10^{-20}$
38	0,323806239	0,324886982	82	0,057099258	0,071102331	126	$3 \cdot 10^{-21}$	$2 \cdot 10^{-22}$
39	0,314220860	0,315381360	83	0,052822626	0,067100690	127	$3 \cdot 10^{-23}$	$7 \cdot 10^{-25}$
40	0,304902789	0,306148484	84	0,048607527	0,063092881	128	$1 \cdot 10^{-25}$	$9 \cdot 10^{-28}$
41	0,295843335	0,297180013	85	0,044465945	0,059079771	129	$4 \cdot 10^{-28}$	$4 \cdot 10^{-31}$
42	0,287033994	0,288467816	86	0,040412022	0,055064373			
43	0,278466437	0,280003956	87	0,036461986	0,051052207			

Taulukko 4.2: Ikäsiirtämättömät $D_{2,x}$ -parametrit

Lause 4.2. *Kaksiosaisen kuolevuusperusteen ikäsiirtämätön D_x saadaan kaavalla*

$$(4.3) \quad D_x = \begin{cases} D_{1,x} & , \text{ kun } x \leq k \\ D_{2,x} \frac{D_{1,k}}{D_{2,k}} & , \text{ kun } x > k \end{cases} .$$

Todistus. Oletetaan $x \leq k$, jolloin $\mu_t \equiv \mu_{1,t}$ kaikilla $t \in [0, x]$. D-luvuksi saadaan

$$D_x = e^{-\int_0^x (\mu_t + \delta) dt} = e^{-\int_0^x (\mu_{1,t} + \delta) dt} = D_{1,x} .$$

Jos $x > k$, saadaan $\mu_t = \mu_{1,t}$, kun $t \in [0, k]$ ja $\mu_t = \mu_{2,t}$, kun $t \in [k, x]$, jolloin

$$\begin{aligned} D_x &= e^{-\int_0^x (\mu_t + \delta) dt} \\ &= \exp \left\{ -\int_0^k (\mu_{1,t} + \delta) dt - \int_k^x (\mu_{2,t} + \delta) dt \right\} \\ &= \exp \left\{ -\int_0^k (a_{11} e^{a_{12}t} + \delta) dt - \int_k^x (a_{21} e^{a_{22}t} + \delta) dt \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{a_{11}}{a_{12}} - \frac{a_{11} e^{a_{12}k}}{a_{12}} - \delta k - \frac{a_{21} e^{a_{22}x}}{a_{22}} + \frac{a_{21} e^{a_{22}k}}{a_{22}} + \delta k - \delta x \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{\mu_{1,0}}{a_{12}} - \frac{\mu_{1,k}}{a_{12}} - \delta k + \frac{\mu_{2,k}}{a_{22}} - \frac{\mu_{2,x}}{a_{22}} + \delta k - \delta x \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{\mu_{1,0}}{a_{12}} - \frac{\mu_{1,k}}{a_{12}} - \delta k \right\} \cdot \frac{\exp \left\{ \frac{\mu_{2,0}}{a_{22}} - \frac{\mu_{2,x}}{a_{22}} - \delta x \right\}}{\exp \left\{ \frac{\mu_{2,0}}{a_{22}} - \frac{\mu_{2,k}}{a_{22}} - \delta k \right\}} \\ &= D_{2,x} \frac{D_{1,k}}{D_{2,k}} . \end{aligned}$$

□

Kaksiosaisen kuolevuusperusteen lauseen 4.2. mukaiset ($k = 70$) ikäsiirtämättömät D-luvut on taulukoitu seuraavalla sivulla. Ikäsiirretyn D-luvun voi pääoma-arvojen laskentaan hakea taulukosta ikäsiirron b_2 avulla (kuten yksiosaisessakin kuolevuusperusteessa). Ikäsiirtojen huomioimista kommutaatio- ja diskonttausfunktioissa on vielä tarkasteltu myöhemmässä kappaleessa 4.3.

Ikä	D_x (miehet)	D_x (naiset)	Ikä	D_x (miehet)	D_x (naiset)	Ikä	D_x (miehet)	D_x (naiset)
0	1,000000000	1,000000000	44	0,267512900	0,269862203	88	0,030875803	0,045088434
1	0,970839643	0,970856426	45	0,259282307	0,261773478	89	0,027388177	0,041277079
2	0,942526563	0,942560644	46	0,251265831	0,253906717	90	0,024054483	0,037502453
3	0,915035958	0,915087895	47	0,243455823	0,246254664	91	0,020895022	0,033782546
4	0,888343740	0,888414141	48	0,235844789	0,238810232	92	0,017929879	0,030138890
5	0,862426519	0,862516038	49	0,228425390	0,231566497	93	0,015178033	0,026596385
6	0,837261573	0,837370920	50	0,221190429	0,224516690	94	0,012656363	0,023182851
7	0,812826836	0,812956773	51	0,214132857	0,217654192	95	0,010378584	0,019928261
8	0,789100875	0,789252222	52	0,207245760	0,210972526	96	0,008354189	0,016863615
9	0,766062870	0,766236510	53	0,200522361	0,204465357	97	0,006587505	0,014019431
10	0,743692599	0,743889475	54	0,193956019	0,198126479	98	0,005076965	0,011423908
11	0,721970417	0,722191542	55	0,187540222	0,191949815	99	0,003814712	0,009100841
12	0,700877237	0,701123696	56	0,181268596	0,185929411	100	0,002786643	0,007067471
13	0,680394521	0,680667470	57	0,175134896	0,180059432	101	0,001972957	0,005332511
14	0,660504252	0,660804930	58	0,169133020	0,174334157	102	0,001349201	0,003894662
15	0,641188928	0,641518655	59	0,163257005	0,168747979	103	0,000887772	0,002741920
16	0,622431540	0,622791724	60	0,157501036	0,163295397	104	0,000559695	0,001851944
17	0,604215559	0,604607702	61	0,151859458	0,157971021	105	0,000336499	0,001193618
18	0,586524921	0,586950621	62	0,146326780	0,152769562	106	0,000191926	0,000729696
19	0,569344014	0,569804973	63	0,140897696	0,147685843	107	0,000103248	0,000420239
20	0,552657660	0,553155689	64	0,135567094	0,142714787	108	0,000052052	0,000226246
21	0,536451104	0,536988129	65	0,130330082	0,137851431	109	0,000024418	0,000112881
22	0,520710002	0,521288069	66	0,125182006	0,133090919	110	0,000010574	0,000051684
23	0,505420404	0,506041688	67	0,120118479	0,128428514	111	0,000004190	0,000021476
24	0,490568744	0,491235554	68	0,115135412	0,123859599	112	0,000001505	0,000007998
25	0,476141826	0,476856616	69	0,110229046	0,119379689	113	0,000000484	0,000002632
26	0,462126815	0,462892185	70	0,105395993	0,114984438	114	0,000000138	0,000000753
27	0,448511220	0,449329932	71	0,100922633	0,110899764	115	0,000000034	0,000000184
28	0,435282887	0,436157868	72	0,096492496	0,106868981	116	0,000000007	0,000000038
29	0,422429985	0,423364339	73	0,092101454	0,102885550	117	0,000000001	0,000000006
30	0,409940998	0,410938012	74	0,087745918	0,098942935	118	$2 \cdot 10^{-10}$	0,000000001
31	0,397804708	0,398867867	75	0,083422946	0,095034641	119	$2 \cdot 10^{-11}$	$8 \cdot 10^{-11}$
32	0,386010192	0,387143185	76	0,079130357	0,091154269	120	$2 \cdot 10^{-12}$	$6 \cdot 10^{-12}$
33	0,374546808	0,375753540	77	0,074866868	0,087295594	121	$1 \cdot 10^{-13}$	$3 \cdot 10^{-13}$
34	0,363404183	0,364688786	78	0,070632243	0,083452653	122	$1 \cdot 10^{-14}$	$1 \cdot 10^{-14}$
35	0,352572208	0,353939053	79	0,066427440	0,079619867	123	$4 \cdot 10^{-16}$	$3 \cdot 10^{-16}$
36	0,342041024	0,343494733	80	0,062254784	0,075792180	124	$1 \cdot 10^{-17}$	$5 \cdot 10^{-18}$
37	0,331801014	0,333346473	81	0,058118125	0,071965236	125	$2 \cdot 10^{-19}$	$5 \cdot 10^{-20}$
38	0,321842796	0,323485165	82	0,054022999	0,068135583	126	$3 \cdot 10^{-21}$	$2 \cdot 10^{-22}$
39	0,312157213	0,313901940	83	0,049976774	0,064300911	127	$3 \cdot 10^{-23}$	$7 \cdot 10^{-25}$
40	0,302735320	0,304588157	84	0,045988766	0,060460328	128	$1 \cdot 10^{-25}$	$8 \cdot 10^{-28}$
41	0,293568383	0,295535398	85	0,042070314	0,056614665	129	$4 \cdot 10^{-28}$	$4 \cdot 10^{-31}$
42	0,284647867	0,286735454	86	0,038234799	0,052766809			
43	0,275965426	0,278180323	87	0,034497573	0,048922051			

Taulukko 4.3: Ikäsiirtämättömät D_x -parametrit kaksiosaisella kuolevuusperusteella

4.2 N-luvut kaksiosaisessa kuolevuusperusteessa

Funktio $\bar{N}(x) := \bar{N}_x$ kuvaa vastasyntyneen iässä x alkavan elinikäisen yksikköeläkkeen korolla syntymähetken diskontattujen korvausten yhteenlaskettua odotusarvoa.

$$(4.4) \quad \bar{N}_x = \int_x^\infty D_t dt \quad , \quad x \geq 0.$$

Yksiosainen kuolevuusperusteen N-luvut saadaan approksimoitua Simpsonin $\frac{1}{3}$ -säännön mukaisesti olettamalla

$$\bar{N}_x \approx 0, \text{ kun } x \geq 129, \text{ jolloin } \bar{N}_{128} \approx \frac{D_{128} + D_{129}}{2} \text{ ja}$$

$$\bar{N}_x \approx \begin{cases} \sum_{i=0}^{\frac{126-x}{2}} \frac{1}{3} (D_{x+2i} + 4D_{x+2i+1} + D_{x+2i+2}) + \frac{D_{128} + D_{129}}{2} & , \quad x \in [0, 126] \text{ ja } x = 2n, n \in \mathbb{N} \\ \sum_{i=0}^{\frac{127-x}{2}} \frac{1}{3} (D_{x+2i} + 4D_{x+2i+1} + D_{x+2i+2}) & , \quad x \in [0, 127] \text{ ja } x = 2n + 1, n \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

Kaksiosaisen kuolevuusperusteen N-lukuja ei suoraan saada vastaavanlaisella approksimaatiolla lauseen 4.2. mukaisista D-luvuista, vaan ne on laskettava yksiosaisen perusteen N-lukujen avulla. Kaksiosaisen kuolevuusperusteen N-lukujen laskemiseksi otetaan käyttöön merkinnät

$$\bar{N}_{1,x} = \int_x^\infty D_{1,t} dt, \quad x \geq 0$$

$$\bar{N}_{2,x} = \int_x^\infty D_{2,t} dt, \quad x \geq 0.$$

Kyseiset N-luvut voidaan laskea käyttäen yllä kuvattua approksimaatiota

$$\bar{N}_{j,x} \approx \begin{cases} \sum_{i=0}^{\frac{126-x}{2}} \frac{1}{3} (D_{j,x+2i} + 4D_{j,x+2i+1} + D_{j,x+2i+2}) + \frac{D_{j,128} + D_{j,129}}{2} & , \quad x \in [0, 126] \text{ ja } x = 2n \\ \sum_{i=0}^{\frac{127-x}{2}} \frac{1}{3} (D_{j,x+2i} + 4D_{j,x+2i+1} + D_{j,x+2i+2}) & , \quad x \in [0, 127] \text{ ja } x = 2n + 1, \end{cases}$$

missä $j \in \{0, 1\}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Approksimoitut $\bar{N}_{1,x}$ ja $\bar{N}_{2,x}$ on taulukoitu seuraavilla sivuilla.

Ikä	$\bar{N}_{1,x}$ (miehet)	$\bar{N}_{1,x}$ (naiset)	Ikä	$\bar{N}_{1,x}$ (miehet)	$\bar{N}_{1,x}$ (naiset)	Ikä	$\bar{N}_{1,x}$ (miehet)	$\bar{N}_{1,x}$ (naiset)
0	30,577568968	31,212313001	44	6,030676057	6,631652404	88	0,193545631	0,415141532
1	29,592220801	30,226956484	45	5,767296619	6,365853366	89	0,164512360	0,370001742
2	28,635607256	29,270317552	46	5,512040071	6,108031459	90	0,138621088	0,328086293
3	27,706893517	28,341560852	47	5,264696134	5,857968362	91	0,115711511	0,289324693
4	26,805269211	27,439875430	48	5,025062100	5,615452924	92	0,095612474	0,253640386
5	25,929947704	26,564474020	49	4,792942677	5,380280998	93	0,078142697	0,220949955
6	25,080165415	25,714592359	50	4,568149841	5,152255287	94	0,063111906	0,191162392
7	24,255181155	24,889488523	51	4,350502690	4,931185182	95	0,050322427	0,164178455
8	23,454275484	24,088442281	52	4,139827302	4,716886626	96	0,039571213	0,139890171
9	22,676750086	23,310754466	53	3,935956604	4,509181964	97	0,030652295	0,118180506
10	21,921927165	22,555746369	54	3,738730228	4,307899815	98	0,023359583	0,098923267
11	21,189148858	21,822759148	55	3,547994384	4,112874935	99	0,017489934	0,081983255
12	20,477776664	21,111153256	56	3,363601726	3,923948098	100	0,012846360	0,067216737
13	19,787190896	20,420307883	57	3,185411217	3,740965972	101	0,009241208	0,054472251
14	19,116790140	19,749620420	58	3,013287993	3,563781000	102	0,006499151	0,043591773
15	18,465990743	19,098505934	59	2,847103223	3,392251292	103	0,004459790	0,034412253
16	17,834226305	18,466396662	60	2,686733967	3,226240510	104	0,002979716	0,026767507
17	17,220947195	17,852741516	61	2,532063020	3,065617763	105	0,001933859	0,020490414
18	16,625620073	17,257005611	62	2,382978751	2,910257496	106	0,001216067	0,015415369
19	16,047727442	16,678669796	63	2,239374928	2,760039392	107	0,000738865	0,011380882
20	15,486767194	16,117230210	64	2,101150532	2,614848256	108	0,000432441	0,008232201
21	14,942252189	15,572197844	65	1,968209544	2,474573917	109	0,000242997	0,005823828
22	14,413709834	15,043098119	66	1,840460723	2,339111113	110	0,000130621	0,004021774
23	13,900681683	14,529470479	67	1,717817349	2,208359377	111	0,000066903	0,002705388
24	13,402723047	14,030867994	68	1,600196944	2,082222922	112	0,000032511	0,001768668
25	12,919402615	13,546856972	69	1,487520958	1,960610511	113	0,000014918	0,001120926
26	12,450302093	13,077016593	70	1,379714415	1,843435324	114	0,000006430	0,000686800
27	11,995015847	12,620938542	71	1,276705525	1,730614812	115	0,000002589	0,000405605
28	11,553150566	12,178226666	72	1,178425246	1,622070538	116	0,000000968	0,000230131
29	11,124324930	11,748496628	73	1,084806790	1,517727995	117	0,000000334	0,000124994
30	10,708169291	11,331375587	74	0,995785087	1,417516423	118	0,000000105	0,000064737
31	10,304325369	10,926501876	75	0,911296185	1,321368580	119	0,000000030	0,000031835
32	9,912445950	10,533524698	76	0,831276582	1,229220509	120	0,000000008	0,000014796
33	9,532194607	10,152103827	77	0,755662510	1,141011260	121	0,000000002	0,000006466
34	9,163245414	9,781909322	78	0,684389145	1,056682594	122	$3 \cdot 10^{-10}$	0,000002642
35	8,805282690	9,422621248	79	0,617389759	0,976178637	123	$6 \cdot 10^{-11}$	0,000001003
36	8,458000734	9,073929411	80	0,554594814	0,899445507	124	$1 \cdot 10^{-11}$	0,000000352
37	8,121103584	8,735533095	81	0,495931010	0,826430886	125	$1 \cdot 10^{-12}$	0,000000113
38	7,794304776	8,407140815	82	0,441320287	0,757083556	126	$1 \cdot 10^{-13}$	0,000000033
39	7,477327113	8,088470071	83	0,390678808	0,691352878	127	$1 \cdot 10^{-14}$	0,000000008
40	7,169902453	7,779247121	84	0,343915938	0,629188225	128	$1 \cdot 10^{-15}$	0,000000002
41	6,871771489	7,479206749	85	0,300933241	0,570538361	129	0	0
42	6,582683547	7,188092054	86	0,261623534	0,515350766			
43	6,302396397	6,905654237	87	0,225870034	0,463570920			

Taulukko 4.4: Ikäsiirtämättömät $\bar{N}_{1,x}$ -parametrit

Ikä	$\bar{N}_{2,x}$ (miehet)	$\bar{N}_{2,x}$ (naiset)	Ikä	$\bar{N}_{2,x}$ (miehet)	$\bar{N}_{2,x}$ (naiset)	Ikä	$\bar{N}_{2,x}$ (miehet)	$\bar{N}_{2,x}$ (naiset)
0	30,814255067	31,309632231	44	6,225078303	6,699437970	88	0,185743583	0,323182434
1	29,828894399	30,324267726	45	5,959018432	6,431671527	89	0,154965383	0,278121911
2	28,872242943	29,367604531	46	5,700957354	6,171781936	90	0,127793839	0,237020941
3	27,943465236	28,438806818	47	5,450681185	5,919547230	91	0,104055539	0,199832120
4	27,041750208	27,537063116	48	5,207983697	5,674752620	92	0,083555662	0,166487418
5	26,166310471	26,661585602	49	4,972666200	5,437190348	93	0,066078654	0,136894550
6	25,316381636	25,811609417	50	4,744537427	5,206659559	94	0,051389921	0,110933675
7	24,491221650	24,986391992	51	4,523413426	4,982966176	95	0,039238606	0,088454712
8	23,690110149	24,185212409	52	4,309117472	4,765922793	96	0,029361497	0,069275655
9	22,912347832	23,407370764	53	4,101479973	4,555348571	97	0,021488000	0,053182250
10	22,157255855	22,652187565	54	3,900338400	4,351069153	98	0,015346012	0,039929433
11	21,424175241	21,919003130	55	3,705537208	4,152916582	99	0,010668394	0,029244824
12	20,712466309	21,207177021	56	3,516927776	3,960729239	100	0,007199636	0,020834446
13	20,021508121	20,516087481	57	3,334368353	3,774351785	101	0,004702216	0,014390621
14	19,350697944	19,845130896	58	3,157723997	3,593635124	102	0,002962113	0,009601701
15	18,699450727	19,193721266	59	2,986866533	3,418436369	103	0,001792967	0,006162962
16	18,067198601	18,561289697	60	2,821674503	3,248618830	104	0,001038482	0,003787683
17	17,453390382	17,947283909	61	2,662033118	3,084052005	105	0,000572885	0,002217221
18	16,857491103	17,351167750	62	2,507834213	2,924611590	106	0,000299461	0,001228880
19	16,278981553	16,772420739	63	2,358976187	2,770179501	107	0,000147482	0,000640554
20	15,717357825	16,210537605	64	2,215363947	2,620643906	108	0,000068001	0,000311642
21	15,172130896	15,665027858	65	2,076908825	2,475899268	109	0,000029149	0,000140313
22	14,642826199	15,135415357	66	1,943528491	2,335846401	110	0,000011526	0,000057903
23	14,128983222	14,621237906	67	1,815146834	2,200392531	111	0,000004168	0,000021665
24	13,630155120	14,122046846	68	1,691693821	2,069451369	112	0,000001366	0,000007261
25	13,145908330	13,637406676	69	1,573105307	1,942943181	113	0,000000401	0,000002150
26	12,675822211	13,166894674	70	1,459322815	1,820794868	114	0,000000104	0,000000554
27	12,219488685	12,710100536	71	1,350293249	1,702940031	115	0,000000024	0,000000122
28	11,776511899	12,266626022	72	1,245968544	1,589319036	116	0,000000005	0,000000023
29	11,346507893	11,836084618	73	1,146305242	1,479879056	117	0,000000001	0,000000003
30	10,929104280	11,418101206	74	1,051263969	1,374574088	118	$1 \cdot 10^{-10}$	$4 \cdot 10^{-10}$
31	10,523939944	11,012311743	75	0,960808813	1,273364935	119	$1 \cdot 10^{-11}$	$3 \cdot 10^{-11}$
32	10,130664738	10,618362959	76	0,874906583	1,176219130	120	$1 \cdot 10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-12}$
33	9,748939201	10,235912050	77	0,793525928	1,083110802	121	$8 \cdot 10^{-14}$	$1 \cdot 10^{-13}$
34	9,378434288	9,864626399	78	0,716636314	0,994020449	122	$4 \cdot 10^{-15}$	$5 \cdot 10^{-15}$
35	9,018831100	9,504183293	79	0,644206841	0,908934602	123	$1 \cdot 10^{-16}$	$1 \cdot 10^{-16}$
36	8,669820636	9,154269659	80	0,576204886	0,827845353	124	$5 \cdot 10^{-18}$	$2 \cdot 10^{-18}$
37	8,331103549	8,814581803	81	0,512594580	0,750749723	125	$1 \cdot 10^{-19}$	$1 \cdot 10^{-20}$
38	8,002389913	8,484825164	82	0,453335104	0,677648826	126	$1 \cdot 10^{-21}$	$9 \cdot 10^{-23}$
39	7,683399006	8,164714073	83	0,398378836	0,608546806	127	$1 \cdot 10^{-23}$	$2 \cdot 10^{-25}$
40	7,373859091	7,853971528	84	0,347669341	0,543449502	128	$8 \cdot 10^{-26}$	$4 \cdot 10^{-28}$
41	7,073507222	7,552328970	85	0,301139275	0,482362811	129	0	0
42	6,782089050	7,259526077	86	0,258708231	0,425290722			
43	6,499358640	6,975310559	87	0,220280603	0,372232988			

Taulukko 4.5: Ikäsiirtämättömät $\bar{N}_{2,x}$ -parametrit

Lause 4.5. *Kaksiosaisen kuolevuusperusteen ikäsiirtämätön \bar{N}_x saadaan kaavalla*

$$(4.6) \quad \bar{N}_x = \begin{cases} \bar{N}_{1,x} - \bar{N}_{1,k} + \bar{N}_{2,k} \frac{D_{1,k}}{D_{2,k}} & , \text{ kun } x \leq k \\ \bar{N}_{2,x} \frac{D_{1,k}}{D_{2,k}} & , \text{ kun } x > k \end{cases} .$$

Todistus. Oletetaan $x > k$, jolloin lauseen 4.2. perusteella $D_t \equiv D_{2,t} \frac{D_{1,k}}{D_{2,k}}$ kaikilla $t \in [x, \infty[$. N-luvuksi saadaan

$$\bar{N}_x = \int_x^\infty D_t dt = \int_x^\infty D_{2,t} \frac{D_{1,k}}{D_{2,k}} dt = \frac{D_{1,k}}{D_{2,k}} \int_x^\infty D_{2,t} dt = \bar{N}_{2,x} \frac{D_{1,k}}{D_{2,k}} .$$

Jos $x \leq k$, lauseen 4.2. perusteella saadaan $D_t = D_{1,t}$, kun $t \in [x, k]$ ja $D_t = D_{2,t} \frac{D_{1,k}}{D_{2,k}}$, kun $t \in]k, \infty[$, jolloin

$$\begin{aligned} \bar{N}_x &= \int_x^\infty D_t dt \\ &= \int_x^k D_{1,t} dt + \int_k^\infty D_{2,t} \frac{D_{1,k}}{D_{2,k}} dt \\ &= \int_x^\infty D_{1,t} dt - \int_k^\infty D_{1,t} dt + \frac{D_{1,k}}{D_{2,k}} \int_k^\infty D_{2,t} dt \\ &= \bar{N}_{1,x} - \bar{N}_{1,k} + \bar{N}_{2,k} \frac{D_{1,k}}{D_{2,k}} . \end{aligned}$$

□

Kaksiosaisen kuolevuusperusteen ($k = 70$) ikäsiirtämättömät N-luvut on taulukoitu seuraavalla sivulla. Ikäsiirretyn \bar{N}_x -luvun voi hakea pääoma-arvojen laskentaan (kts. kappale 4.3) taulukosta ikäsiirron b_2 avulla (kuten yksiosaisessakin kuolevuusperusteessa). Myös vastuun- ja maksunlaskennassa käytetty \bar{N}_w , missä w kuvaa henkilön eläkkeellejäämisiikää, voidaan hakea taulukosta kohorttiin liitetyn ikäsiirron avulla, koska ikäsiirto b_2 ei riipu henkilön iästä. Ikäsiirtojen huomioimista kommutaatio- ja diskonttausfunktioissa on vielä tarkasteltu myöhemmässä kappaleessa 4.3.

Ikä	\bar{N}_x (miehet)	\bar{N}_x (naiset)	Ikä	\bar{N}_x (miehet)	\bar{N}_x (naiset)	Ikä	\bar{N}_x (miehet)	\bar{N}_x (naiset)
0	30,578555425	31,113699796	44	6,031662515	6,533039198	88	0,175736529	0,309697632
1	29,593207259	30,128343278	45	5,768283076	6,267240160	89	0,146616525	0,266517262
2	28,636593713	29,171704346	46	5,513026528	6,009418254	90	0,120908864	0,227131231
3	27,707879974	28,242947646	47	5,265682591	5,759355156	91	0,098449481	0,191494116
4	26,806255668	27,341262225	48	5,026048557	5,516839718	92	0,079054047	0,159540723
5	25,930934161	26,465860814	49	4,793929135	5,281667793	93	0,062518624	0,131182619
6	25,081151872	25,615979154	50	4,569136299	5,053642081	94	0,048621256	0,106304962
7	24,256167612	24,790875318	51	4,351489147	4,832571976	95	0,037124601	0,084763935
8	23,455261941	23,989829076	52	4,140813760	4,618273420	96	0,027779628	0,066385125
9	22,677736544	23,212141260	53	3,936943061	4,410568758	97	0,020330320	0,050963218
10	21,922913623	22,457133163	54	3,739716685	4,209286609	98	0,014519236	0,038263376
11	21,190135315	21,724145942	55	3,548980841	4,014261729	99	0,010093628	0,028024583
12	20,478763122	21,012540050	56	3,364588184	3,825334893	100	0,006811751	0,019965128
13	19,788177353	20,321694677	57	3,186397674	3,642352766	101	0,004448881	0,013790171
14	19,117776597	19,651007215	58	3,014274450	3,465167795	102	0,002802527	0,009201070
15	18,466977201	18,999892728	59	2,848089680	3,293638087	103	0,001696370	0,005905812
16	17,835212763	18,367783456	60	2,687720424	3,127627305	104	0,000982533	0,003629642
17	17,221933652	17,754128310	61	2,533049477	2,967004557	105	0,000542020	0,002124708
18	16,626606531	17,158392405	62	2,383965208	2,811644291	106	0,000283328	0,001177605
19	16,048713899	16,580056590	63	2,240361386	2,661426186	107	0,000139537	0,000613827
20	15,487753651	16,018617005	64	2,102136989	2,516235051	108	0,000064337	0,000298639
21	14,943238646	15,473584638	65	1,969196001	2,375960712	109	0,000027578	0,000134459
22	14,414696291	14,944484914	66	1,841447180	2,240497907	110	0,000010905	0,000055487
23	13,901668141	14,430857274	67	1,718803806	2,109746171	111	0,000003944	0,000020761
24	13,403709504	13,932254789	68	1,601183402	1,983609716	112	0,000001292	0,000006958
25	12,920389073	13,448243767	69	1,488507415	1,861997305	113	0,000000379	0,000002061
26	12,451288550	12,978403388	70	1,380700872	1,744822119	114	0,000000099	0,000000531
27	11,996002305	12,522325337	71	1,277545343	1,631884780	115	0,000000022	0,000000117
28	11,554137024	12,079613460	72	1,178841198	1,523004626	116	0,000000004	0,000000022
29	11,125311387	11,649883422	73	1,084547320	1,418131035	117	0,000000001	0,000000003
30	10,709155748	11,232762381	74	0,994626455	1,317219922	118	$1 \cdot 10^{-10}$	$4 \cdot 10^{-10}$
31	10,305311826	10,827888670	75	0,909044629	1,220233725	119	$1 \cdot 10^{-11}$	$3 \cdot 10^{-11}$
32	9,913432408	10,434911493	76	0,827770436	1,127141333	120	$1 \cdot 10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-12}$
33	9,533181064	10,053490621	77	0,750774215	1,037917955	121	$7 \cdot 10^{-14}$	$1 \cdot 10^{-13}$
34	9,164231872	9,683296116	78	0,678027078	0,952544901	122	$4 \cdot 10^{-15}$	$5 \cdot 10^{-15}$
35	8,806269147	9,324008042	79	0,609499789	0,871009264	123	$1 \cdot 10^{-16}$	$1 \cdot 10^{-16}$
36	8,458987192	8,975316205	80	0,545161482	0,793303468	124	$4 \cdot 10^{-18}$	$2 \cdot 10^{-18}$
37	8,122090042	8,636919889	81	0,484978221	0,719424656	125	$9 \cdot 10^{-20}$	$1 \cdot 10^{-20}$
38	7,795291233	8,308527609	82	0,428911388	0,649373898	126	$1 \cdot 10^{-21}$	$9 \cdot 10^{-23}$
39	7,478313571	7,989856865	83	0,376915923	0,583155163	127	$1 \cdot 10^{-23}$	$2 \cdot 10^{-25}$
40	7,170888911	7,680633915	84	0,328938434	0,520774047	128	$7 \cdot 10^{-26}$	$4 \cdot 10^{-28}$
41	6,872757946	7,380593543	85	0,284915206	0,462236201	129	0	0
42	6,583670005	7,089478848	86	0,244770160	0,407545448			
43	6,303382854	6,807041031	87	0,208412845	0,356701550			

Taulukko 4.6: Ikäsiirtämättömät \bar{N}_x -parametrit kaksiosaisella kuolevuusperusteella

4.3 Ikäsiirrot diskonttaus- ja kommutaatiofunktioissa

Diskonttaus- ja kommutaatiofunktioiden avulla lasketaan vanhuuseläkkeiden maksun- sekä vastuunlaskennassa käytettävät pääoma-arvot.

Ikäsiirtämättömästä taulukosta ikäsiirron b_2 ja iän x perusteella haettu D - tai \bar{N} -luku ei suoraan vastaa ikäsiirron b_2 mukaan laskettua arvoa. Pääoma-arvokertoimissa kyseiset luvut kuitenkin esiintyvät aina osamäärissä, jolloin osoittautuu, että ikäsiirretty pääoma-arvo voidaan kuitenkin laskea ikäsiirtämättöminä taulukoitujen diskonttaus- ja kommutaatiofunktioiden avulla. Kyseinen ilmiö on olemassa myös nykyisessä yksiosaisessa kuolevuusperusteessa (Aho & Sankala [1]), eikä siihen tule muutosta kaksiosaisen kuolevuusperusteen myötä. Tässä kappaleessa on esitetty pääoma-arvokertoimien laskennan toimivuus myös kaksiosaiselle mallille.

Määritelmä 4.7. Olkoon x henkilön ikä ja w eläkeikä. Jos $x \geq w$, niin oletetaan, että vastainen vanhuuseläke tulee heti maksettavaksi. Tällöin nykyhetken korolla diskontattu yksikköeläkkeiden tulevien korvausten odotusarvo on

$$(4.8) \quad \bar{A}_{x:w}^V = \begin{cases} \frac{\bar{N}_w}{D_x} & , \text{ kun } x \leq w \\ \frac{\bar{N}_x}{D_x} & , \text{ kun } x \geq w \end{cases}$$

Tässä kappaleessa osoitetaan, että kaksiosaisen kuolevuusperusteen ikäsiirretylle vanhuuseläkkeiden vakuutusmaksu- ja korvausvastuun pääoma-arvokertoimelle $\bar{A}_{x:w}^V$ pätee

$$(4.9) \quad \bar{A}_{x:w}^V(b_2) = \bar{A}_{x+b_2:w}^V(0).$$

Lause 4.10. *Ikäsiirretty $D(x, b_2)$ saadaan ikäsiirtämättömästä D -luvusta kaavalla*

$$(4.11) \quad D_x := D(x, b_2) = \frac{D(x + b_2, 0)}{e^{-b_2\delta}}.$$

Todistus. Oletetaan $x + b_2 \leq k$, jolloin ikäsiirretty $\mu_t(b_2) \equiv \mu_{1,t}(b_2)$ kaikilla $t \in [0, x]$.

Ikäsiirretyksi D -luvuksi saadaan

$$\begin{aligned}
D(x, b_2) &= e^{-\int_0^x (\mu_t(b_2) + \delta) dt} \\
&= e^{-\int_0^x (\mu_{1,t}(b_2) + \delta) dt} \\
&= \exp \left\{ -\frac{a_{11}}{a_{12}} e^{a_{12}(x+b_2)} - \delta x + \frac{a_{11}}{a_{12}} e^{a_{12}(b_2)} \right\} \\
&\quad \exp \left\{ -\frac{a_{11}}{a_{12}} e^{a_{12}(x+b_2)} - \delta(x+b_2) + \frac{a_{11}}{a_{12}} \right\} \\
&= \frac{\exp \left\{ -\frac{a_{11}}{a_{12}} e^{a_{12}(x+b_2)} - \delta(x+b_2) + \frac{a_{11}}{a_{12}} \right\}}{\exp \left\{ -\frac{a_{11}}{a_{12}} e^{a_{12}(b_2)} - \delta b_2 + \frac{a_{11}}{a_{12}} \right\}} \\
&= \frac{\exp \left\{ -\frac{\mu_{1,x+b_2}(0)}{a_{12}} + \frac{a_{11}}{a_{12}} - \delta(x+b_2) \right\}}{\exp \left\{ -\frac{\mu_{1,0}(b_2)}{a_{12}} + \frac{a_{11}}{a_{12}} - \delta b_2 \right\}} \\
&= \frac{D_1(x+b_2, 0)}{e^{-b_2\delta}}.
\end{aligned}$$

Viimeisessä vaiheessa käytettiin tulkinallista lisäoletusta $\mu_0(b_2) = \mu_0 = a_{11}$ kaikilla $b_2 \in \mathbb{Z}$. Oletus on perusteltavissa sillä, että vastasyntyneen elossaolotodennäköisyys iässä 0 täytyy olla 1 riippumatta kyseisen kohortin ikäsiirrosta, jolloin $D(0, b_2)$ sisältää ikäsiirron kautta ainoastaan korkotermin. Jos $x+b_2 > k$, saadaan $\mu_t(b_2) = \mu_{1,t}(b_2)$, kun $t \in [0, k-b_2]$ ja $\mu_t(b_2) = \mu_{2,t}(b_2)$, kun $t \in [k-b_2, x]$, jolloin

$$\begin{aligned}
D(x, b_2) &= e^{-\int_0^x (\mu_t(b_2) + \delta) dt} \\
&= \exp \left\{ -\int_0^{k-b_2} (\mu_{1,t}(b_2) + \delta) dt - \int_{k-b_2}^x (\mu_{2,t}(b_2) + \delta) dt \right\} \\
&= \exp \left\{ -\int_0^{k-b_2} (a_{11}e^{a_{12}(t+b_2)} + \delta) dt - \int_{k-b_2}^x (a_{21}e^{a_{22}(t+b_2)} + \delta) dt \right\} \\
&= \exp \left\{ \frac{a_{11}}{a_{12}} e^{a_{12}b_2} - \frac{a_{11}e^{a_{12}(k)}}{a_{12}} - \delta k - \frac{a_{21}e^{a_{22}(x+b_2)}}{a_{22}} + \frac{a_{21}e^{a_{22}(k)}}{a_{22}} + \delta k - \delta x \right\} \\
&= \frac{\exp \left\{ \frac{a_{11}}{a_{12}} - \frac{a_{11}e^{a_{12}(x+b_2)}}{a_{12}} - \delta(x+b_2) \right\}}{\exp \left\{ \frac{a_{11}}{a_{12}} - \frac{a_{11}e^{a_{12}b_2}}{a_{12}} - \delta b_2 \right\}} \cdot \frac{\exp \left\{ \frac{a_{11}}{a_{12}} - \frac{a_{11}e^{a_{12}(k)}}{a_{12}} - \delta(k) \right\}}{\exp \left\{ \frac{a_{21}}{a_{22}} - \frac{a_{21}e^{a_{22}(k)}}{a_{22}} - \delta(k) \right\}} \\
&= \frac{\exp \left\{ \frac{a_{11}}{a_{12}} - \frac{\mu_{1,x+b_2}(0)}{a_{12}} - \delta(x+b_2) \right\}}{\exp \left\{ \frac{a_{11}}{a_{12}} - \frac{\mu_{1,0}(b_2)}{a_{12}} - \delta b_2 \right\}} \cdot \frac{\exp \left\{ \frac{a_{11}}{a_{12}} - \frac{\mu_{1,k}(0)}{a_{12}} - \delta(k) \right\}}{\exp \left\{ \frac{a_{21}}{a_{22}} - \frac{\mu_{2,k}(0)}{a_{22}} - \delta(k) \right\}} \\
&= \frac{D_2(x+b_2, 0) \frac{D_1(k, 0)}{D_2(k, 0)}}{e^{-b_2\delta}}.
\end{aligned}$$

Koska lauseen 4.2. mukaisesti ikäsiirtämättömät D -luvut saadaan kaavalla

$$(4.12) \quad D(x, 0) = \begin{cases} D_1(x, 0) & , \text{ kun } x \leq k \\ D_2(x, 0) \frac{D_1(k, 0)}{D_2(k, 0)} & , \text{ kun } x > k \end{cases},$$

voidaan ikäsiirretyt D -luvut kirjoittaa

$$D(x, b_2) = \begin{cases} e^{b_2\delta} D_1(x + b_2, 0) & , \text{ kun } x + b_2 \leq k \\ e^{b_2\delta} D_2(x + b_2, 0) \frac{D_1(k, 0)}{D_2(k, 0)} & , \text{ kun } x + b_2 > k \end{cases},$$

eli $D(x, b_2) = e^{b_2\delta} D(x + b_2, 0)$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$ ja $b_2 \in \mathbb{Z}$. □

Lause 4.13. *Ikäsiirretty $\bar{N}(x, b_2)$ saadaan ikäsiirtämättömästä \bar{N} -luvusta kaavalla*

$$(4.14) \quad \bar{N}_x := \bar{N}(x, b_2) = \frac{\bar{N}(x + b_2, 0)}{e^{-b_2\delta}}.$$

Todistus. Väite seuraa suoraan lauseesta 4.10., sillä

$$\begin{aligned} \bar{N}(x, b_2) &= \int_x^\infty D(t, b_2) dt \\ &= \int_x^\infty \left(1_{\{t+b_2 \leq k\}} \frac{D(t + b_2, 0)}{e^{-b_2\delta}} + 1_{\{t+b_2 > k\}} \frac{D_2(t + b_2, 0) \frac{D_1(k, 0)}{D_2(k, 0)}}{e^{-b_2\delta}} \right) dt \\ &= \frac{1}{e^{-b_2\delta}} \int_x^\infty \left(1_{\{t+b_2 \leq k\}} D(t + b_2, 0) + 1_{\{t+b_2 > k\}} D_2(t + b_2, 0) \frac{D_1(k, 0)}{D_2(k, 0)} \right) dt \\ &= \frac{1}{e^{-b_2\delta}} \int_x^\infty D(t + b_2, 0) dt \\ &= \frac{1}{e^{-b_2\delta}} \int_{x+b_2}^\infty D(t, 0) dt \\ &= \frac{N(x + b_2, 0)}{e^{-b_2\delta}}. \end{aligned}$$

□

Lause 4.15. *Kaksiosaisen kuolevuusperusteen pääoma-arvolle $\bar{A}_{x:w}^V$ pätee*

$$(4.16) \quad \bar{A}_{x:w}^V(b_2) = \bar{A}_{x+b_2:w}^V(0).$$

Todistus. Väite seuraa lauseista 4.10. ja 4.13., sillä ikäsiirto b_2 ei riipu iästä x eikä eläkeiästä w , joten

$$\frac{\bar{N}(w, b_2)}{D(x, b_2)} = \frac{e^{b_2\delta} \bar{N}(w + b_2, 0)}{e^{b_2\delta} D(x + b_2, 0)} = \frac{\bar{N}(w + b_2, 0)}{D(x + b_2, 0)} \text{ ja } \frac{\bar{N}(x, b_2)}{D(x, b_2)} = \frac{e^{b_2\delta} \bar{N}(x + b_2, 0)}{e^{b_2\delta} D(x + b_2, 0)} = \frac{\bar{N}(x + b_2, 0)}{D(x + b_2, 0)}$$

□

Luku 5

Yhteenveto

Määritelmä 5.1. TyEL:n uuden kaksiosaisen kuolevuusperusteen kuolevuusintensiteetti μ iässä x saadaan kaavalla

$$\mu_x = \begin{cases} a_{11}e^{a_{12}(x+b_2)} & , \text{ kun } x + b_2 \leq 70 \\ a_{21}e^{a_{22}(x+b_2)} & , \text{ kun } x + b_2 > 70 \end{cases} ,$$

missä parametrit a_{ij} $i, j \in \{1, 2\}$ riippuvat sukupuolesta ja ikäsiirto määräytyy ainoastaan syntymävuosikymmenen mukaan:

$$\begin{aligned} a_{11,mies} &= e^{\frac{6}{7} \cdot 1,027 - 11,18} & a_{12,mies} &= \frac{6}{7} \cdot 0,1027 \\ a_{21,mies} &= e^{\frac{6}{7} \cdot 1,217 - 12,68} & a_{22,mies} &= \frac{6}{7} \cdot 0,1217 \\ a_{11,nainen} &= e^{\frac{6}{7} \cdot 1,031 - 11,86} & a_{12,nainen} &= \frac{6}{7} \cdot 0,1031 \\ a_{21,nainen} &= e^{\frac{6}{7} \cdot 1,416 - 14,79} & a_{22,nainen} &= \frac{6}{7} \cdot 0,1416 \end{aligned}$$

$$b_2 = \begin{cases} 5, & v - x < 1930 \\ 3, & 1930 \leq v - x < 1940 \\ 2, & 1940 \leq v - x < 1950 \\ 0, & 1950 \leq v - x < 1960 \\ -2, & 1960 \leq v - x < 1970 \\ -3, & 1970 \leq v - x < 1980 \\ -5, & 1980 \leq v - x < 1990 \\ -7, & 1990 \leq v - x < 2000 \\ -8, & 2000 \leq v - x < 2010 \\ -10, & 2010 \leq v - x < 2020 \end{cases} .$$

Kirjallisuutta

- [1] Jaakko Aho ja Mikko Sankala: Eläketurvakeskuksen käsikirjoja, Pääoma-arvokertoimet, 02/2011
- [2] Jaakko Tuomikoski, Janne Sorainen ja Satu Kilponen: Eläketurvakeskuksen käsikirjoja, Lakisääteisen työeläkevakuutuksen vakuutustekniikkaa, 2007:4
- [3] Martti Pesonen, Pentti Soininen ja Tapani Tuominen: Henkivakuutusmatematiikka, Suomen Vakuutusalan Koulutus ja Kustannus Oy, 1999